Aula 3

Definição: Define-se o conjunto dos números complexos, e designa-se por $\mathbb{C}$, como o conjunto dos pares ordenados de $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

com as operações

- **adição**

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

- **multiplicação**

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Teorema:O conjunto $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ dos números complexos com as operações de soma e multiplicação forma um **corpo**.

- Comutatividade da soma e multiplicação

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \qquad\qquad z_1 z_2 = z_2 z_1$$

- Associatividade da soma e multiplicação

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \qquad\qquad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

- Existência de elementos neutros da soma e multiplicação

$$z + (0,0) = z, \qquad\qquad z\,(1,0) = z$$

- Existência de simétrico

$$(x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (0,0)$$

- Existência de inverso (para $z = (x,y) \neq (0,0)$)

$$(x,y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right) = (1,0)$$

- Propriedade distributiva

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

Proposição:Os elementos neutros da soma e multiplicação são únicos, assim como são únicos também o simétrico de cada $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, que se designa por $-z = (-x, -y)$, e o inverso de cada $z = (x, y) \neq (0, 0) \in \mathbb{C}$, que se designa por $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

Definição:Definem-se em $\mathbb{C}$ as seguintes operações

- **Subtração**

$$z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2)$$

- **Divisão**

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 z_2^{-1} \qquad (z_2 \neq (0, 0))$$

- **Potência inteira**

$$z^n := \underbrace{z \cdots z}_{n \text{ vezes}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Proposição:O subconjunto dos complexos

$$\{(x,0) \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}\}$$

é **isomorfo** a $\mathbb{R}$ com a soma e multiplicações usuais. Consequentemente passaremos a identificar o real $x \in \mathbb{R}$ com o complexo $(x,0) \in \mathbb{C}$

$$x \sim (x,0)$$

Definição:Designamos por i o complexo $(0,1)$. Tem-se então

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$$

e

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) = x + iy.$$

Definição:Dado um número complexo $z = (x,y) = x + iy \in \mathbb{C}$ definem-se

- **parte real** de z, e designa-se por $\mathrm{Re}(z) = x$.
- **parte imaginária** de z, e designa-se por $\mathrm{Im}(z) = y$.

Coordenadas Polares

Definição:Dado um número complexo $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$ definem-se

- **Módulo** ou **Valor Absoluto** de z, e designa-se por $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- **Argumento** de z $(\neq 0)$, ao ângulo (classe de equivalência) formado por z e pelo eixo real

$$\text{Arg}(z) = \theta_z = \text{arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \; (\pm\pi \text{ no } 2^{\text{o}} \text{ e } 3^{\text{o}} \text{ quad}).$$

Chama-se **ramo do argumento** a qualquer escolha única do ângulo numa faixa $]\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$.
Chama-se **ramo principal do argumento** à escolha única no intervalo $]-\pi, \pi]$.

Chama-se **representação trigonométrica** ou em **coordenadas polares** dum complexo à forma

$$z = |z|\cos\theta_z + i|z|\text{sen}\,\theta_z = |z|(\cos\theta_z + i\,\text{sen}\,\theta_z).$$

Proposição (Fórmula de De Moivre):Dados complexos

$$z = |z|(\cos\theta_z + i\,\mathrm{sen}\,\theta_z) \qquad \text{e} \qquad w = |w|(\cos\theta_w + i\,\mathrm{sen}\,\theta_w),$$

então o produto é dado por

$$zw = |z||w|(\cos(\theta_z + \theta_w) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_z + \theta_w)),$$

ou seja,

$$|zw| = |z||w| \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Arg}(zw) = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w).$$

Analogamente, para o quociente $(w \neq 0)$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(w).$$

Da mesma forma

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta_z) + i\,\mathrm{sen}\,(n\theta_z)).$$

Proposição: Dados complexos $z, w \in \mathbb{C}$,

- $|z| \in \mathbb{R}$, $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|zw| = |z||w|$
- $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$ para $w \neq 0$.
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (**desigualdade triangular**).
- $||z| - |w|| \leq |z - w|$.
- $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.
- $|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$.